Toets Discrete Structuren

vrijdag 16 december 2005, 14 - 16 uur

Elke opgave levert maximaal 10 punten op. Het cijfer is gelijk aan (p/10) + 1, afgerond op gehele en halve waarden, waarbij p het totaal aantal behaalde punten is. Een 5 of hoger levert recht op vrijstelling bij het tentamen van 8 februari 2006 voor de stof van de eerste 4 hoofdstukken. Bij vrijstelling telt het toetsresultaat voor de helft mee bij de berekening van het eindcijfer.

Nota Bene: beargumenteer je antwoorden.

1. We beschouwen functies $f, g, h : S \to S$. Definieer de compositie $f \circ g$ van f en g. Bewijs dat $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat $f \circ g = g \circ f$ niet algemeen geldt.

2. Geef een voorbeeld van een verzameling X zodanig dat $|\mathcal{P}(X)| = 8$, dwz. de machtsverzameling van X bevat 8 elementen. Leg uit waarom er geen verzameling Y bestaat met $|\mathcal{P}(Y)| = 7$.

3. Bewijs **mbv. een lineair geannoteerd bewijs** dat de formule

   $$(p \wedge (q \to r)) \leftrightarrow ((p \to q) \to (p \wedge r))$$

   een tautologie is. (Op de achterzijde staat een lijst met geldige bewijsregels.)

4. Bewijs: er zijn oneindig veel priemgetallen.

5. De relatie $\sim$ op Z is gedefinieerd door: $m \sim n$ dan en slechts dan als $\lfloor m/10 \rfloor = \lfloor n/10 \rfloor$. Hier is $\lfloor \cdot \rfloor : R \to Z$ de *floor function*: $\lfloor x \rfloor$ is het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan x. Bewijs dat $\sim$ een equivalentie-relatie is. Hoe zien de equivalentieklassen van $\sim$ eruit?

6. Bewijs met volledige inductie over N:

   $$\forall n \in N \; 3 \mid (n^3 - n)$$

7. Geef een definitie van: p is een invariant van `while g do S`.
   Als p is een invariant van `while g do S` en de loop termineert, wat geldt dan na afloop van de loop?

8. Geef een expliciete formule voor s_n, gegeven door

   $$s_0 = 1$$
   $$s_1 = 2$$
   $$s_n = 3s_{n-1} + 4s_{n-2} \text{ voor } n \geq 2$$

9. Geef van elk van de volgende uitspraken aan of ze waar zijn of niet. Vergeet je argumentatie niet.

   $3n + 7$ is $O(n^2)$ $\quad$ $3n + 7$ is $\Theta(n^2)$ $\quad$ $5 \cdot 2^n$ is $O(3^n)$ $\quad$ $5 \cdot 2^n$ is $\Theta(3^n)$